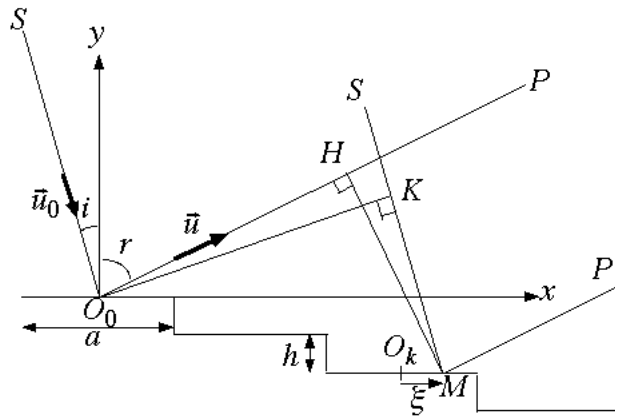
Réseau échelette.

Ce type de réseau par réflexion a un profil d'escalier dont les marches ont une longueur a et une hauteur h. Seules les marches sont réfléchissantes ; les contre-marches ne le sont pas. Les marches ont, perpendiculairement à la figure, une largeur grande devant a. Ce réseau est éclairé par une source monochromatique en forme de fente très mince perpendiculaire au plan de figure ; on sait dans ce cas que la diffraction se ramène à un problème plan dans le plan de figure. La fente est à l'infini dans une direction faisant l'angle i avec la normale aux marches et l'on cherche, en fonction de la direction des rayons réfléchis (définie par l'angle r), l'intensité de la figure de diffraction à l'infini.



Question 1 :
Avant tout calcul, que peut-on dire de la figure de diffraction ?

On est ici dans un contexte de diffraction par un ensemble de motifs tous identiques. Dans ce cas la fonction donnant l'intensité en fonction de la position est produit de deux fonctions :

– la première est la fonction qu'on obtiendrait avec un seul motif, soit ici celle de la tache de diffraction d'une fente rectangulaire longue, donc un sinus cardinal au carré,
– la seconde est celle obtenue avec des motifs devenus ponctuels au milieu de chaque motif large, donc ici un réseau formé d'un grand nombre de points équidistants, fonction qu'on sait être nulle partout sauf dans les directions où la différence de marche entre deux points successifs est un nombre entier de longueurs d'onde.

Question 2 :
Calculer la différence de marche entre le rayon de référence se réfléchissant au milieu O_0 de la première marche (on numérote à partir de zéro) et un rayon quelconque se réfléchissant en un point M de la $k$ième marche de milieu O_k ; on notera ξ la distance algébrique O_kM, le sens positif étant dans le sens de la numérotation croissante des marches.

Le calcul est de routine. On note S la source et P le point à l'infini dans la direction d'angle r.

$$\Delta = [SMP] - [SO_0P] = ([SM] - [SO_0]) + ([MP] - [O_0P]) = KM - O_0H$$

en appliquant le théorème de Malus en amont et, en imaginant une source fictive en P, en aval. Introduisons les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_0}$ de la direction incidente (donnée) et $\overrightarrow{u}$ de la direction de réflexion (variable du problème). KM et O_0H sont les projections de O_0M sur les rayons incident et réfléchi, donc

$$\Delta = \overrightarrow{O_0M} \cdot \overrightarrow{u_0} - \overrightarrow{O_0M} \cdot \overrightarrow{u}$$

Introduisons les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ des axes O_0x et O_0y définis par la figure. On a

$$\overrightarrow{u_0} = \sin i \, \overrightarrow{e_x} - \cos i \, \overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{u} = \sin r \, \overrightarrow{e_x} + \cos r \, \overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O_k} + \overrightarrow{O_kM} = k\,(a\,\overrightarrow{e_x} - h\,\overrightarrow{e_y}) + \xi\,\overrightarrow{e_x}$$

d'où

$$\Delta = k\,[a\,(\sin i - \sin r) - h\,(\cos i + \cos r)] + \xi\,(\sin i - \sin r)$$

Pour alléger la rédaction de la suite, posons

$$\delta = a\,(\sin i - \sin r) - h\,(\cos i + \cos r) \qquad \text{et} \qquad \alpha = (\sin i - \sin r)$$

Le déphasage entre les deux rayons est donc

$$\varphi = 2\,\pi\,\frac{\Delta}{\lambda} = 2\,\pi\,\frac{k\,\delta + \alpha\,\xi}{\lambda}$$

Question 3 :

Retrouver la factorisation de la question 1 à partir du principe de Huygens-Fresnel et indiquer, sans calcul, les valeurs de $\sin r$ ***correspondant aux points particuliers des deux fonctions. On a droit à une approximation légitimée sur les cosinus.***

Le principe de Huygens-Fresnel revient à intégrer le facteur de phase $\exp \jmath\varphi$ sur tout la longueur du dispositif.

$$\underline{\sigma}(r) = \int_{\text{dispositif}} \exp \jmath\varphi\,\mathrm{d}\xi = \sum_{k=0}^{k=N} \int_{\text{marche } k} \exp \jmath\varphi\,\mathrm{d}\xi = \sum_{k=0}^{k=N} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\exp 2\,\jmath\,\pi\,\frac{k\,\delta + \alpha\,\xi}{\lambda}\right)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\underline{\sigma}(r) = \sum_{k=0}^{k=N} \left[\left(\exp 2\,\jmath\,\pi\,\frac{\delta}{\lambda}\right)^k \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{\alpha\,\xi}{\lambda}\right)\,\mathrm{d}\xi\right]$$

$$\underline{\sigma}(r) = \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{\alpha\,\xi}{\lambda}\right)\,\mathrm{d}\xi\right]\left[\sum_{k=0}^{k=N}\left(\exp 2\,\jmath\,\pi\,\frac{\delta}{\lambda}\right)^k\right]$$

On retrouve la factorisation annoncée pour $\underline{\sigma}(r)$ et donc pour $I(r) = |\underline{\sigma}(r)|^2$. L'intégrale conduit à un $\mathrm{snc}^2(\pi\,\frac{\alpha\,a}{\lambda})$ dont le maximum est atteint pour un argument nul soit $\alpha = 0$ et $\sin r = \sin i$, soit $r = i$. Notons au passage que l'on retrouve le fait que la tache de diffraction est centrée dans la direction de l'optique géométrique (lois de Snell-Descartes pour la réflexion). Les zéros de cette fonction sont obtenus pour un argument multiple entier non nul de π soit des valeurs r'_n de r telles que

$$\pi\,\frac{\alpha\,a}{\lambda} = n\,\pi \qquad \text{soit} \qquad \alpha = \sin i - \sin r'_n = n\,\frac{\lambda}{a} \qquad \text{soit} \qquad \sin r'_n = \sin i - n\,\frac{\lambda}{a}$$

formule qui donne les directions où la première fonction est nulle (pour n non nul) ou maximale (n nul).

La seconde fonction est nulle sauf pour des valeurs entières de l'ordre d'interférence $p = \delta/\lambda$ et un microchouïa autour, donc pour des angles r''_p tels que

$$\delta = a\,(\sin i - \sin r''_p) - h\,(\cos i + \cos r''_p) = p\,\lambda$$

dont on aura des valeurs approchées pour des angles i et r pas trop élevés en disant que $\cos i \approx \cos r \approx 1$ d'où

$$\delta = a\,(\sin i - \sin r''_p) - 2\,h = p\,\lambda$$

$$\sin r''_p = \sin i - 2\,\frac{h}{a} - p\,\frac{\lambda}{a}$$

Question 4 :
Montrer qu'on peut choisir les paramètres du réseau de sorte que la direction du maximum de la diffraction par un seul motif correspond à l'ordre p_0 (ou $-p_0$) du réseau. Quel intérêt par rapport à un réseau classique ?

Si l'on choisit le réseau de façon que

$$2\,\frac{h}{a} = p_0\,\frac{\lambda}{a}$$

alors $r''_{(-p_0)} = r'_0$, ce qui est l'objectif demandé. De façon identique, pour toute valeur n non nulle, $r''_{(n-p_0)} = r'_n$ et les directions des autres ordres du réseau coïncident avec les zéros de la tache de diffraction par une seule marche.

Donc pour $r \notin \{r''_p\}$ la fonction «réseau» est nulle et pour $r \in \{r''_p \,|\, p \neq -p_0\}$ la fonction «diffraction par une marche» est nulle et donc la seule direction où l'on observe une intensité non nulle est $r'_0 = r''_{(-p_0)}$.

Ceci permet d'isoler l'ordre p_0 qu'on choisit assez élevé ; l'intérêt étant que plus l'ordre est élevé, plus il est facile de séparer deux raies proches. Avec un réseau classique le chevauchement des ordres empêche de travailler (sauf acrobaties) au delà de l'ordre 2.

Question 4 :
Que penser d'une utilisation en lumière polychromatique ?

D'abord, c'est nécessaire car on ne voit guère d'intérêt à un spectroscope qui ne marche que pour une lumière monochromatique donnée, ça relèverait de l'oxymore. Or la condition

$$2\,\frac{h}{a} = p_0\,\frac{\lambda}{a}$$

ne peut être vérifiée que pour une seule longueur d'onde. Pour autant, notre étude n'est pas à jeter aux oubliettes de la physique. Si la condition est vérifiée pour λ_0, alors pour λ proche de λ_0, l'ordre p_0 de la fonction «réseau» est proche du maximum de la fonction «diffraction par une marche» et les autres ordres de la première sont proches des zéros de la seconde et le fonctionnement reste correct. La seule contrainte est qu'il ne faut pas trop s'éloigner de la longueur d'onde «nominale», quitte à utiliser un filtre. On peut imaginer un réseau calculé pour $\lambda_0 = 450\,\mathrm{nm}$ et fonctionnant correctement de $400\,\mathrm{nm}$ à $500\,\mathrm{nm}$. Quatre réseaux ainsi conçus suffiraient à couvrir tout le spectre visible de $400\,\mathrm{nm}$ à $800\,\mathrm{nm}$.